Mögliche Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen und verschiedene Berechnungsvarianten

1 Mögliche Lagebeziehungen

Generell unterscheidet man **drei** verschiedene Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen E und F.

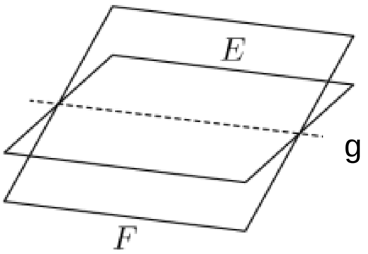
<table>
<tr><td>1. Möglichkeit</td><td>2. Möglichkeit</td><td>3. Möglichkeit</td></tr>
<tr><td>

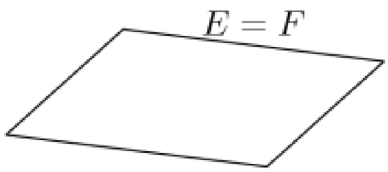
Abb. 1: Zwei sich in einer gemeinsam Geraden schneidenden Ebenen</td><td>

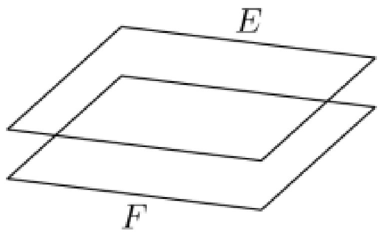
Abb. 2: Zwei identische Ebenen</td><td>

Abb. 3: Zwei echt parallele Ebenen</td></tr>
<tr><td>$E \cap F = \{g\}$</td><td>$E \equiv F$</td><td>$E \underset{\text{echt}}{\parallel} F$</td></tr>
</table>

2 Verschiedene Berechnungsvarianten

Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ können Ebenen in Parameter- oder in der Koordinatenform vorliegen. Dementsprechend sind drei verschiedene „Kombinationsvarianten“ bei Aufgabenstellungen möglich.

2.1 Beide Ebenen liegen in Parameterform vor

Wenn beide Ebenen in der Parameterform gegeben sind, dann bestimmt man die Lagebeziehung durch das „Gleichsetzen“ und Lösen des dadurch entstehenden LGS.

Beispiele:

Beispiel 1

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\-3\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

$$F:\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\2\\6\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix};\sigma,\tau\in\mathbb{R}$$

Ansatz: $E = F$

$$\begin{array}{c|cccc|cl}
 & \lambda & \mu & \sigma & \tau & & \\
\mathrm{I} & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\
\mathrm{II} & 2 & 1 & -1 & 1 & 5 & \\
\mathrm{III} & 1 & 0 & -1 & -5 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\
\mathrm{II'} & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & (\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}) \\
\mathrm{III'} & 0 & -1 & -1 & -5 & 1 & (\mathrm{III}-\mathrm{I}) \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\
 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & \\
\mathrm{III''} & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & (\mathrm{III'}-\mathrm{II'})
\end{array}$$

Das LGS ergibt in Zeile III" weder eine falsche -, noch eine wahre Aussage. Das LGS ist demnach lösbar.
Da für die 4 Unbekannten Parameter nur 3 Gleichungen zur Verfügung stehen, ist im Normalfall einer der beiden "letzten" Parameter σ oder τ frei wählbar.
$\Rightarrow E\cap F=\{g\}$ [Lagebez.]
Im vorliegenden Sonderfall ist jedoch nur σ frei wählbar, da τ durch die Gleichung III' eindeutig festgelegt ist.

Aus III" $\Rightarrow$ 1.) $\underline{\sigma=k}\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ 2.) $0\tau=0\Leftrightarrow\underline{\tau=0}$

σ und τ in F:

$$\Rightarrow g:\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\2\\6\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9\\2\\6\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};k\in\mathbb{R}$$

Beispiel 2

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\-3\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

$$F:\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\0\\4\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};\sigma,\tau\in\mathbb{R}$$

Ansatz: $E = F$

$$\begin{array}{c|cccc|cl}
 & \lambda & \mu & \sigma & \tau & & \\
\mathrm{I} & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & \\
\mathrm{II} & 2 & 1 & -3 & -1 & 3 & \\
\mathrm{III} & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & \\
\mathrm{II'} & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & (\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}) \\
\mathrm{III'} & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & (\mathrm{III}-\mathrm{I}) \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\
 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & \\
\mathrm{III''} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\mathrm{III'}-\mathrm{II'})
\end{array}$$

Das LGS ist gemäß III" für <u>beide</u> Parameter σ und τ mehrdeutig lösbar.
Da für die 4 Unbekannten Parameter jetzt nur noch 2 Gleichungen zur Verfügung stehen, sind die beiden Parameter σ oder τ frei wählbar.

Aus III" $\Rightarrow$ 1.) $\sigma=k\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ 2.) $\tau=m\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow E\equiv F$ [Lagebez.]

Beispiel 3

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\-3\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

$$F:\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\0\\3\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};\sigma,\tau\in\mathbb{R}$$

Ansatz: $E = F$

$$\begin{array}{c|cccc|cl}
 & \lambda & \mu & \sigma & \tau & & \\
\mathrm{I} & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & \\
\mathrm{II} & 2 & 1 & -3 & -1 & 3 & \\
\mathrm{III} & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & \\
\mathrm{II'} & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & (\mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}) \\
\mathrm{III'} & 0 & -1 & 1 & -1 & -2 & (\mathrm{III}-\mathrm{I}) \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\
 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & \\
\mathrm{III''} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & (\mathrm{III'}-\mathrm{II'})
\end{array}$$

Das LGS ist gemäß III" <u>nicht</u> lösbar.
Aus III" $\Rightarrow 0\tau=-1$ (f.A.)
$\Rightarrow E \parallel_{\text{echt}} F$ [Lagebez.]

2.2 Eine Ebene liegt in Parameterform, die andere in Koordinatenform vor

Wenn z. B. die Ebene E in der Koordinatenform gegeben ist, dann bestimmt man die Lagebeziehung durch das Einsetzen der „Punktemenge“ der Ebene F in die Ebene E. Dadurch erhält man eine Gleichung mit zwei Unbekannten (das sind Parameter der Ebene F!). Diese Gleichung ist dann mehrdeutig lösbar, (1 oder beide Parameter sind frei wählbar) oder nicht lösbar.

EINDEUTIG lösbar für beide Parameter ist NICHT möglich, da sich zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ NIE in genau einem Schnittpunkt schneiden können.

Beispiele:

$E: 6x_1+5x_2-3x_3-5=0$ $F: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+2\sigma+\tau\\ \sigma+2\tau\\ 1+4\sigma+2\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix};\sigma,\tau\in\mathbb{R}$ Ansatz: F in E einsetzen $\Rightarrow \underbrace{P_{\sigma,\tau}\left(-2+2\sigma+\tau\mid\sigma+2\tau\mid1+4\sigma+2\tau\right)}_{\text{Pktmenge } F}$ $E: 6(-2+2\sigma+\tau)+5(\sigma+2\tau)-3(1+4\sigma+2\tau)-5=0$ $-12+12\sigma+6\tau+5\sigma+10\tau-3-12\sigma-6\tau-5=0$ $-20+5\sigma+10\tau=0$ Die entstandene Gleichung ist weder eine falsche -, noch eine wahre Aussage. Die Gleichung ist demnach lösbar. Da für die 2 Unbekannten Parameter nur eine Gleichungen zur Verfügung steht, ist im Normalfall einer der beiden Parameter σ oder τ frei wählbar. Im vorliegenden Fall sind σ oder τ frei wählbar. $\Rightarrow E\cap F=\{g\}$ [Lagebez.] Wähle z. B. $\underline{\tau=k}\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow -20+5\sigma+10k=0$ $5\sigma=-10k+20$ $\underline{\sigma=-2k+4}$ σ und τ in F einsetzen: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + (-2k+4)\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix};k\in\mathbb{R}$ $= \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4k+8\\-2k+4\\-8k+16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k\\2k\\2k\end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3k+8\\4\\-6k+16\end{pmatrix} =$ $= \underbrace{\begin{pmatrix}6\\4\\17\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-3\\0\\-6\end{pmatrix}}_{\text{Punkt-Richtungsform einer Geraden}};k\in\mathbb{R}$	$E: 6x_1+5x_2-3x_3-5=0$ $F: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix}-2+3\sigma+\tau\\4-3\sigma\\1+\sigma+2\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix};\sigma,\tau\in\mathbb{R}$ Ansatz: F in E einsetzen Ansatz: F in E einsetzen Durch das Einsetzen entsteht z. B. die unten stehende Gleichung. . . . $0\sigma+0\tau=0$ (w.A.) Die Gleichung ist für beide Parameter mehrdeutig lösbar $\Rightarrow 1.)\sigma=k\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow 2.)\tau=m\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow E\equiv F$ [Lagebez.]	$E: 6x_1+5x_2-3x_3-5=0$ $F: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix}-2+3\sigma+\tau\\-3\sigma\\1+\sigma+2\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix};\sigma,\tau\in\mathbb{R}$ Ansatz: F in E einsetzen Ansatz: F in E einsetzen Durch das Einsetzen entsteht z. B. die unten stehende Gleichung. . . . $0\sigma+0\tau=7$ (f.A.) Die Gleichung ist <u>nicht</u> lösbar. $\Rightarrow E \parallel_{\text{echt}} F$ [Lagebez.]

2.3 Beide Ebenen liegen in Koordinatenform vor

Wenn beide „Objekte“ in der Koordinatenform gegeben sind, dann bestimmt man die Lagebeziehung durch das Lösen des dadurch entstehenden LGS.

Merke:
VOR dem Aufstellen des LGS sollte man überprüfen, ob die Ebenen eventuell „Vielfache“ voneinander sind.

- Sind die Koeffizienten vor den Koordinaten Vielfache zueinander und die Konstante NICHT, dann sind die Ebenen „echt parallel“ zueinander.
- Sind die Ebenen zusätzlich auch in den Konstanten Vielfache zueinander, dann sind die Ebenen identisch!

Beispiele:

<table>
<tr>
<td>
$E:\quad x_1-4x_2+2x_3-6=0$
$F:-2x_1-7x_2+x_3+2=0$
Die Koeffizienten vor den Koordinaten (x_1,x_2 und x_3) sind offensichtlich KEINE Vielfache zueinander.
$\Rightarrow E\cap F=\{g\}$ [Lagebez.]

$E:\quad x_1-4x_2+2x_3-6=0$
$F:-2x_1-7x_2+x_3+2=0$
$$\begin{array}{c|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \mathrm{I} & 1 & -4 & 2 & 6 \\ \mathrm{II} & -2 & -7 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -4 & 2 & 6 \\ \mathrm{II'} & 0 & -15 & 5 & 10 \quad (\mathrm{II}+2\cdot \mathrm{I}) \end{array}$$
</td>
<td>
$E:\quad x_1-4x_2+2x_3-6=0$
$F:-2x_1+8x_2-4x_3+12=0$

Die Koeffizienten der Koordinaten von F <u>und die</u> Konstante sind das –2fache der Koeffizienten von E.

Demnach gilt:
$\Rightarrow E\equiv F$ [Lagebez.]
</td>
<td>
$E:\quad x_1-4x_2+2x_3-6=0$
$F:-2x_1+8x_2-4x_3+2=0$
Die Koeffizienten der Koordinaten von F sind das 2fache der Koeffizienten von E.
Die Konstante aber nicht.
Demnach gilt:
$\Rightarrow E \underset{\text{echt}}{\parallel} F$ [Lagebez.]
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Das LGS ergibt in Zeile II" weder eine falsche -, noch eine wahre Aussage. Das LGS ist demnach lösbar.
Da für die 3 Unbekannten Parameter nur 2 Gleichungen zur Verfügung stehen, ist im Normalfall eine der beiden "letzten" Koordinaten x_3 oder x_2 frei wählbar.
Wähle aus II' z. B. $\underline{x_3=k\in\mathbb{R}}$
$\Rightarrow -15x_2+5k=10$
$-15x_2=10-5k$
$\underline{x_2=-\frac{2}{3}k+\frac{1}{3}}$
x_2 und x_3 in I
$\Rightarrow x_1-4\left(-\frac{2}{3}k+\frac{1}{3}\right)+2(k)=6$
$x_1+\frac{8}{3}k+\frac{4}{3}+2k=6$
$x_1+\frac{14}{3}k+\frac{4}{3}=6$
$\underline{x_1=\frac{14}{3}-\frac{14}{3}k}$
$$\Rightarrow g:\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{14}{3}-\frac{14}{3}k\\ -\frac{2}{3}k+\frac{1}{3}\\ k\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{14}{3}\\ \frac{1}{3}\\ 0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}-\frac{14}{3}\\ -\frac{2}{3}k\\ 1\end{pmatrix}}_{\text{Punkt-Richtungsform einer Geraden}}\quad;k\in\mathbb{R}$$
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Wer sich im Internet die Vorgehensweisen mit Hilfe von Videos noch einmal vertiefen will, findet rechts zwei QR-Codes dazu (vgl. [1] und [2]):

4 Quellen und Literaturangaben

Abb. 1: Zwei sich in einer gemeinsam Geraden schneidenden Ebenen, https://www.google.de/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwiJ0I_koeraAhUGzKQKHW64DHQQjRx6BAgBEAU&url=http://archive.is/2pA1V&psig=AOvVaw3I3GCTm75MyGCdAfnrY3ju&ust=1525461665808158, zugegriffen am 12.10.2018

Abb. 2: Zwei identische Ebenen https://www.google.de/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwiJ0I_koeraAhUGzKQKHW64DHQQjRx6BAgBEAU&url=http://archive.is/2pA1V&psig=AOvVaw3I3GCTm75MyGCdAfnrY3ju&ust=1525461665808158, zugegriffen am 12.10.2018

Abb. 3: Zwei echt parallele Ebenen https://www.google.de/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwiJ0I_koeraAhUGzKQKHW64DHQQjRx6BAgBEAU&url=http://archive.is/2pA1V&psig=AOvVaw3I3GCTm75MyGCdAfnrY3ju&ust=1525461665808158, zugegriffen am 12.10.2018

[1] Video „Lage Ebene/Ebene, Parameterformen gleichstellen, Lagebeziehung von Ebenen“, Daniel Jung, https://www.youtube.com/watch?v=HI1rFLpq_dI

[2] Video „Lagebeziehung, Lage von 2 Ebenen in Koordinatenform, Beispiel Schnittgerade“, Daniel Jung, https://www.youtube.com/watch?v=YhQphAm9ci4

Verwendete, weiterführende Literatur:
W. Olmscheid, A. Prim: Analysis, lineare Algebra und analytische Geometrie, FOS/BOS Nichttechnik 13, Bayern, Softfrutti Verlag, Saarbrücken 2008

Anmerkung: Dieses Handout-Beispiel soll Ihnen zeigen, wie ein solches Handout im Bereich Mathematik aussehen kann. Bitte immer in enger Absprache mit Ihrer betreuenden Lehrkraft bleiben – auch beim Handout. Es gibt – wie so oft – viele richtige Möglichkeiten